VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

MATEMATIKA I

MODUL BA01_M06, GA01_M05

DIFERENCIÁLNÍ POČET I

DERIVACE FUNKCE

STUDIJNÍ OPORY

PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

[0]Typeset by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Cíle

Cíle jednotlivých odstavců tohoto modulu jsou následující:

2.1 Derivace funkce patří k nejzákladnějším pojmům matematické analýzy. Je zapotřebí dobře zvládnout definici derivace a na základě jejího geometrického významu umět určit rovnici tečny a normály ke grafu funkce v zadaném bodě. Určitě si spočítejte alespoň jeden příklad na výpočet derivace funkce z definice. Seznámíte se také se vztahem mezi derivací a spojitostí funkce v bodě. Dobře si zapamatujte pravidla pro derivování funkcí a tabulku derivací elementárních funkcí. Obojí budete potřebovat při řešení konkrétních příkladů a úloh. Pro dobré zvládnutí derivování je zapotřebí si vyřešit dostatečné množství příkladů. Bez potřebné znalosti derivování není možné úspěšně studovat další části matematické analýzy.

2.2 Umět znázornit geometrický význam diferenciálu funkce v bodě. Znát definici diferenciálu a použití diferenciálu v odhadu chyb při měřeních zatížených chybou.

2.3 Seznámíte se s vlastnostmi funkcí spojitých na intervalu. Měli byste umět formulovat vybrané základní vlastnosti funkcí spojitých na intervalu a znát jejich geometrickou interpretaci.

2.4 Umět zapsat definici derivace n–tého řádu a znát počítání derivací vyšších řádů.

2.5 Znát vztahy pro výpočet diferenciálů vyšších řádů a podmínky jejich existence.

2.6 Jde o důležitou problematiku, která má značné využití v různých aplikacích (například v numerické matematice). Cílem je umět definovat Taylorův a Maclaurinův polynom stupně n, znát Lagrangeův tvar zbytku a zápis Taylorova polynomu užitím diferenciálů.

2.7 L'Hospitalovo (čti: lopitalovo) pravidlo vám umožní určovat limity některých složitějších funkcí. Je zapotřebí umět l'Hospitalovo pravidlo správně zformulovat. K pochopení jeho přesné formulace vám pomohou komentáře uvedené v tomto odstavci.

2.8 Umět charakterizovat svislé, vodorovné a šikmé asymptoty grafu funkce. Znát vztahy potřebné pro jejich výpočet.

2.9 Znát definici lokálních extrémů, nutné a postačující podmínky pro jejich existenci s využitím derivací.

2.10 Měli byste mít geometrickou představu o konvexnosti a konkávnosti funkce, znát popis těchto vlastností užitím derivace druhého řádu, umět popsat inflexní body.

2.11 Jde o využití poznatků diferenciálního počtu pro hledání průběhů funkcí. Pouze vyřešením dostatečného počtu příkladů můžete získat potřebné početní zkušenosti.

1.2 Požadované znalosti

Pro potřeby zvládnutí tohoto modulu předpokládáme znalosti studentů v rozsahu modulu Matematika I, Moduly BA01_M04, BA01_M05.

1.3 Doba potřebná ke studiu

Čas potřebný ke zvládnutí tohoto modulu je odhadnut pro *průměrného studenta* jako hodnota nejméně 18 hodin.

1.4 Klíčová slova

Derivace funkce, diferenciál funkce, Taylorův polynom, l'Hospitalovo pravidlo, asymptoty grafu funkce, extrémy funkce, průběh funkce.

Na konci modulu zařazen *Rejstřík*, ve kterém jsou další klíčová slova přehledně uspořádána i s odkazy na odpovídající stránky.

1.5 Metodický návod k práci s textem

Text je uspořádán podle stejných zásad, jako ostatní dříve studované moduly předmětu Matematika.

Kapitola 2

Derivace funkce

2.1 Derivace funkce

2.1.1 Pojem derivace, základní vlastnosti

Mějme funkci $f : y = x^2$ a hledejme rovnici tečny k jejímu grafu v bodě $P_0 = [3, 9]$. Uvažujme posloupnost bodů $P_n = [3 + \frac{1}{n}, (3 + \frac{1}{n})^2]$ grafu funkce f, která zřejmě konverguje k bodu P_0 (neboť $3 + \frac{1}{n} \to 3, (3 + \frac{1}{n})^2 \to 9$ pro $n \to \infty$). Vedeme-li postupně dvojicemi bodů P_0 a P_n přímky (tzv. sečny), dostaneme následující posloupnost $(\operatorname{tg} \alpha_n)$ směrnic sečen:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{f(3 + \frac{1}{n}) - f(3)}{3 + \frac{1}{n} - 3} = \frac{(3 + \frac{1}{n})^2 - 3^2}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 6 + \frac{1}{n}.$$

Odpovídající posloupnost sečen má n–tý člen $s_n : y - 9 = (6 + \frac{1}{n})(x - 3)$. Je vidět, že posloupnost sečen konverguje k tečně ke grafu funkce v bodě P_0 a posloupnost směrnic sečen konverguje k číslu 6, které nazveme směrnicí tečny ke grafu funkce f v bodě P_0. Tečna má proto rovnici $t : y - 9 = 6(x - 3)$. Zobecníme naše úvahy a budeme uvažovat obecně posloupnost bodů $P_n = [3 + h_n, (3 + h_n)^2,]$ kde $(h_n) \to_{n\to\infty} 0, h_n \neq 0$, dostaneme obdobně, že $(\operatorname{tg} \alpha_n) \to 6$, neboť

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{f(3 + h_n) - f(3)}{3 + h_n - 3} = \frac{6h_n + h_n^2}{h_n} = 6 + h_n.$$

Tyto úvahy nás vedou k následující definici.

Definice 2.1.1: *Je-li funkce f definována v nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li limita*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

*nazýváme ji **derivací funkce** f **v bodě** x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.*

Pokud $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, říkáme, že fukce f má v bodě x_0 ***vlastní derivaci.*** *Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že fukce f má v bodě x_0* ***nevlastní derivaci.*** *Pokud limita neexistuje, řekneme, že fukce f nemá v bodě x_0 derivaci, nebo že derivace v bodě x_0* ***neexistuje****.*

Existuje-li $\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, nazýváme tuto limitu ***derivací zprava*** *funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'_+(x_0)$. Analogicky definujeme* ***derivaci zleva*** *a značíme ji $f'_-(x_0)$.*

Je-li f funkce a $M = \{x \in \mathbb{R};\ \text{existuje vlastní } f'(x_0)\}$, pak funkci $f' : x \mapsto f'(x)$ s definičním oborem M nazveme ***derivací funkce*** *f* ***na množině*** *M.*

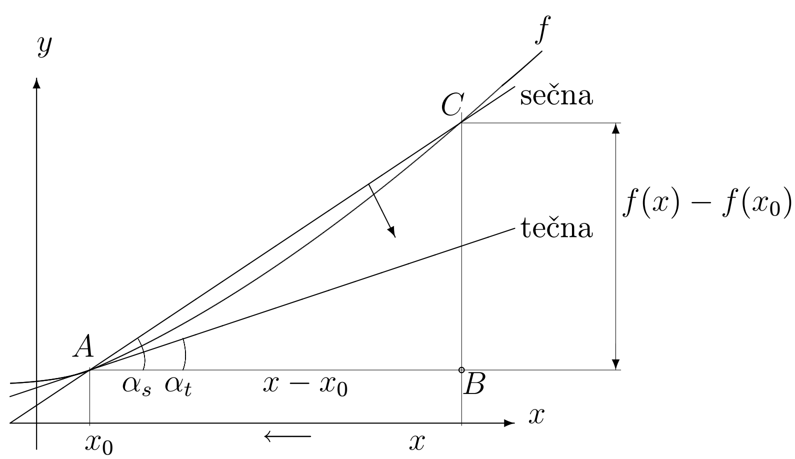
△

Poznámka: Při označení $x = x_0 + h$ používáme také zápis

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

◇	Slovem „derivace“ budeme v dalším textu rozumět vlastní derivaci.

Geometrický význam derivace



Platí $f'(x) = \operatorname{tg}\, \alpha_t = \lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{tg}\, \alpha_s = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Rovnice tečny a normály ke grafu funkce f v bodě $A = [x_0, f(x_0)]$ mají tvar

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

$$n : y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0), \text{ pokud } f'(x_0) \neq 0.$$

(Promyslete si tvar rovnic tečny a normály ke grafu funkce f v případě, kdy je $f'(x_0) = 0$.)

Nyní si uvedeme ukázky výpočtů derivací funkcí z definice.

Příklad 2.1.1: Odvoďte z definice derivaci $f'(x_0)$ funkce

$$a)\ f(x) = \sqrt{x},\ x_0 \in (0, \infty), \quad b)\ f(x) = \sin x,\ x_0 \in \mathbb{R}.$$

Řešení:

$$a)\ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

$$b)\ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \to x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = \cos x_0.$$

Cvičení 2.1.1: Odvoďte z definice derivaci $f'(x_0)$ funkce

$$a)\ f(x) = x^3, \quad b)\ f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 \in \mathbb{R}.$$

Z definice derivace vyplývají tyto vlastnosti:

1. Funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci zprava i zleva a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
2. Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.

První vlastnost vyplývá z analogické vlastnosti limit. Druhá vlastnost se často využívá a proto si ukážeme, jak se dá odvodit. Z existence vlastní derivace plyne, že $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Odtud

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0),$$

a tedy funkce f je spojitá v bodě x_0.

Poznámka. Tvrzení 2. nelze obrátit. Funkce spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nemusí mít derivaci, jak ukazuje následující příklad:
Funkce $f : y = |x|$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$, ale derivaci v tomto bodě nemá, neboť $f'_+(0) = \lim_{x\to 0_+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0_+} 1 = 1$, $f'_-(0) = \lim_{x\to 0_-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0_-} (-1) = -1 \neq f'_+(0)$, takže $f'(0)$ neexistuje (viz vlastnost 1.).

2.1.2 Pravidla pro derivování

A) Mají-li funkce f, g derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a jestliže $c \in \mathbb{R}$, pak platí:

1. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.
2. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
4. Je-li $g(x_0) \neq 0$, pak
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

B) Má-li funkce g derivaci v bodě x_0 a funkce f má derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$, pak platí
$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g))'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

C) Je-li funkce f spojitá a ryze monotónní na otevřeném intervalu J a má-li v bodě $y_0 \in J$ derivaci $f'(y_0) \neq 0$, pak funkce f^{-1} má derivaci v bodě $x_0 = f(y_0)$ a platí
$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Pravidla $A1 - A4, B$ (o derivaci složené funkce) se musíte dobře naučit, protože je budete neustále používat při řešení příkladů. Pravidlo C (o derivaci inverzní funkce) slouží především k odvození vzorců pro derivaci inverzních funkcí, např. cyklometrických.

Ukážeme si, jak je možno odvodit platnost například pravidla A3.
$$(fg)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Cvičení 2.1.2: Odvoďte si pravidla A1 a A2.

Využijeme ještě pravidla C k odvození derivace funkce arkussinus.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 (\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \; x \in (-1, 1).$$

Prověřte si, že jsou splněny všechny předpoklady pravidla C.

Poznámka: Uvedená pravidla pro derivování se dají zobecnit. Mají-li funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$ derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a jsou-li $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, pak platí

A2' $(c_1 f_1 + \cdots c_n f_n)'(x_0) = c_1 f_1'(x_0) + \cdots c_n f_n'(x_0)$,

A3' $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) \cdot f_2(x_0) \cdot \ldots \cdot f_n(x_0) +$
$+ f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0) \cdot \ldots \cdot f_n(x_0) + \cdots + f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) \cdot \ldots \cdot f_n'(x_0)$.

B' $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)'(x_0) = f_3'(v_0) \cdot f_2'(u_0) \cdot f_1'(x_0)$, kde $u_0 = f_1(x_0)$, $v_0 = f_2(u_0)$.

2.1.3 Tabulka derivací elementárních funkcí

$f(x)$	$f'(x)$	**podmínky platnosti**
c	0	$x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$
x^{-n}	$-n \cdot x^{-n-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty),\ n \in \mathbb{N}$
x^k	$k \cdot x^{k-1}$	$x \in (0, \infty),\ k \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$x \in \mathbb{R},\ a > 0$
$\ln x$	$1/x$	$x \in (0, \infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$x \in (0, \infty),\ a > 0,\ a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tg}\ x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{cotg}\ x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\mathrm{arctg}\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{arccotg}\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tgh}\ x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{cotgh}\ x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Pro ilustraci derivování uvedeme několik řešených příkladů. Při řešení budeme používat označení $y' = f'(x)$.

Cvičení 2.1.3: Zadané funkce derivujte a výsledek upravte:

1.

$$y = 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{5x} + \sqrt{\pi}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Využitím vlastností A2, A1 a prvních vzorců z tabulky derivací dostáváme pro $x \neq 0$

$$y' = (3x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{5}x^{-1} + \sqrt{\pi}\,)' = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} - \frac{1}{5} \cdot (-1) \cdot x^{-2} + 0 = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{5x^2}.$$

Při derivování součinu $c \cdot f(x)$ konstanty s funkcí používejte pravidlo A1 a konstantu vytkněte. Nederivujte $c \cdot f(x)$ jako součin funkcí.

2.

$$y = \frac{3x+2}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Na základě vzorce A4 platí

$$y' = \frac{(3x+2)' \cdot (x^2+1) - (3x+2) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot (x^2+1) - (3x+2) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2 - 4x + 3}{(x^2+1)^2}.$$

3.

$$y = \sqrt{3x^2+4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zadanou funkci si vyjádříme jako složenou funkci, přičemž vnější složka je funkce $f(u) = \sqrt{u}$, vnitřní složka $u = g(x) = 3x^2 + 4$. Pak obdržíme

$$y' = \underbrace{f'(u) \cdot g'(x)}_{(f' \circ g)(x) \cdot g'(x)} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x^2+4}} \cdot 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}.$$

4.

$$y = \sin^2(3x-1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Abychom mohli použít vzorce z tabulky derivování elementárních funkcí, vyjádříme si funkci jako „trojnásobně složenou funkci“, kde $u = f_1(x) = 3x - 1$, $v = f_2(u) = \sin u$, $f_3(v) = v^2$. Pak dle B' platí

$$y' = f_3'(v) \cdot f_2'(u) \cdot f_1'(x) = 2v \cdot \cos u \cdot 3 = 2\sin(3x-1)\cos(3x-1) \cdot 3 =$$

$$= 3\sin(6x-2).$$

Nejprve jsme tedy derivovali druhou mocninu, pak funkci sinus a nakonec funkci $3x - 1$.

5.

$$y = \frac{1}{\operatorname{arctg}\,(2x+1)} \quad x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}.$$

Funkční předpis převedeme na tvar $y = (\operatorname{arctg}\,(2x+1))^{-1}$ a derivujeme podle vzorce B' (zde není vhodné derivovat jako podíl funkcí). Pak

$$y' = \left((\operatorname{arctg}\,(2x+1))^{-1}\right)' = (-1)\cdot(\operatorname{arctg}\,(2x+1))^{-2}\cdot\frac{1}{1+(2x+1)^2}\cdot 2 =$$

$$= -\frac{1}{(2x^2+2x+1)\cdot\operatorname{arctg}^{\,2}(2x+1)}.$$

Cvičení 2.1.4: Zadané funkce derivujte a výsledek upravte. Určete $D(f)$ a obor, na kterém existuje derivace.

1) $\frac{2-3x^2}{\sqrt{\pi}}$

2) $\frac{2x^3}{\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt[3]{x}}$

3) $\frac{\sin x}{1-\cos x} + \operatorname{tg}\pi$

4) $\frac{x\ln x}{1-x}$

5) $2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x-x^2}$

6) $-\frac{x+6}{2}\sqrt{5+4x-x^2} + \frac{17}{2}\arcsin\frac{x-2}{3}$

7) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$

8) $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$

9) $\frac{1}{\ln^2(x^2+1)}$

2.2 Diferenciál funkce

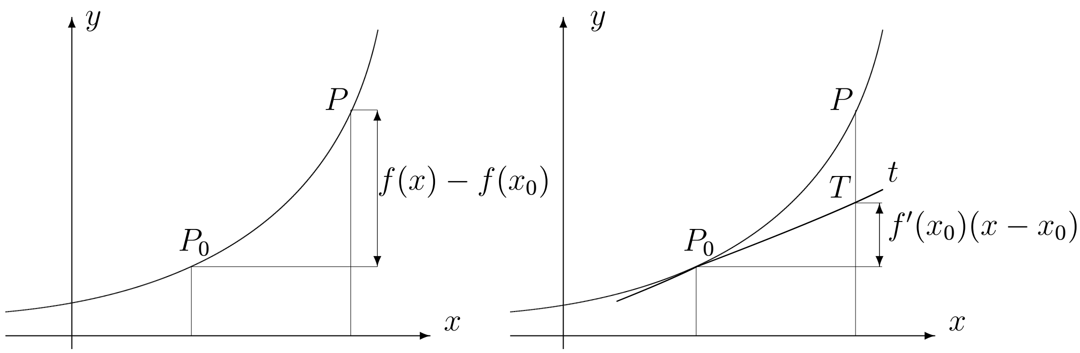
Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$. Pak platí $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ a tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje okolí $\mathcal{P}(x_0,\delta)$ takové, že $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$, tj. můžeme psát $f'(x_0) \doteq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ v $\mathcal{P}(x_0,\delta)$ a tedy

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Všimněme si geometrického významu této přibližné rovnosti. Víme, že rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $P_0 = [x_0, f(x_0)]$ má tvar

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0).$$

Odtud vyplývá, že jsme přírůstek funkčních hodnot $f(x) - f(x_0)$ nahradili přírůstkem $f'(x_0)(x-x_0)$ na tečně t.



$$\underbrace{\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\text{přírůstek funkčních hodnot}}}_{\text{rozdíl } f(P) - f(P_0)} \doteq \underbrace{\underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{přírůstek funkčních hodnot na tečně}}}_{\text{rozdíl } f(T) - f(P_0)} = f'(x_0)h$$

Tyto úvahy nás vedou k definici

Definice 2.2.1: *Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak výraz*

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h$$

nazýváme ***diferenciálem funkce*** f ***v bodě*** x_0 *pro přírůstek h nezávisle proměnné x.*

△

Poznámka: Lze ukázat, že pro diferenciál funkce platí následující vztahy

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0, h)}{|h|} = 0,$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\mathrm{d}f(x_0, h)} = 1,$$

kde $x = x_0 + h$.

Příklad 2.2.1: Užitím diferenciálu určete absolutní a relativní chybu, která vznikne výpočtem objemu krychle z naměřené délky hrany krychle $a_0 = 2m$, jestliže měření je zatíženo chybou, nepřesahující 0.2 mm.

Řešení: Absolutní chybu odhadneme absolutní hodnotou diferenciálu, tj. $| \triangle V| \doteq |dV(a_0, h)|$, kde $a_0 = 2$ m, $|h| = 2 \cdot 10^{-4}$ m. Víme, že $V = a^3$ a odtud $|dV(a_0, h)| = |V'(a_0) \cdot h| = |3a_0^2 \cdot h| = 0.0024$ m^3. Relativní chybu odhadneme takto:

$$\left|\frac{\triangle V}{V}\right| \doteq \frac{|dV|}{V} = \frac{0.0024}{8} \doteq 0.0003,$$

tj. 0.3 $^\circ/_{\circ\circ}$.

Cvičení 2.2.1: Vypočítejte:

1) $\mathrm{d}f(1; 0{,}2)$ pro funkci $f(x) = \operatorname{arctg}(2x-1)$.
2) $\mathrm{d}f(x_0; h)$ pro funkci $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
3) $\mathrm{d}f(0; h)$ pro funkci $f(x) = e^x \cos 3x$.

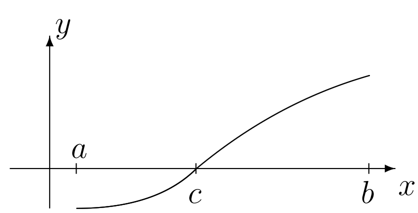
2.3 Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu

Uvedeme si stručný přehled některých vlastností funkcí spojitých v intervalu, které mají značnou využitelnost zejména při zdůvodňování a odvozování různých vztahů v diferenciálním a integrálním počtu, v numerické matematice a podobně. Tvrzení jsou geometricky velmi názorná.

V dalším budeme předpokládat, že $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

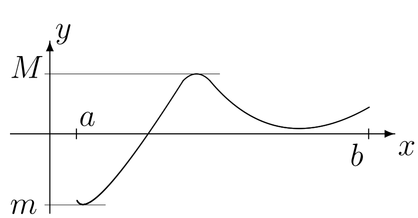
1. *Cauchyova věta o nulové hodnotě*:

Je-li funkce f spojitá na intervalu $< a, b >$ a platí-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.



2. *Weierstrassova věta*:

Je-li funkce f spojitá na intervalu $< a, b >$, pak je f na intervalu $< a, b >$ ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty.

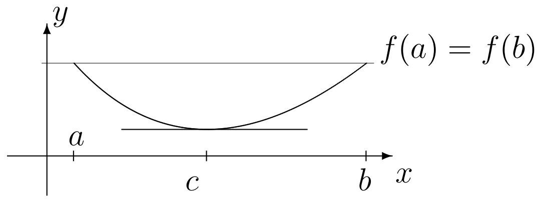


$M = \max\,\{f(x);\ x \in < a, b >\}$

$m = \min\,\{f(x);\ x \in < a, b >\}$

3. *Rolleova věta*:

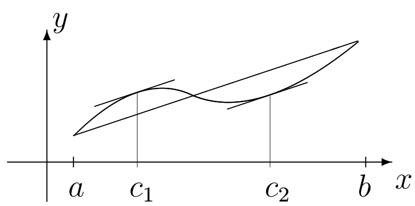
Je-li funkce f spojitá na intervalu $< a, b >$ a má-li derivaci v intervalu (a, b), přičemž $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.



Tečna grafu v bodě c je rovnoběžná s osou x.

4. *Lagrangeova věta o přírůstku funkce*:

   Je-li funkce f spojitá na intervalu $< a, b >$ a má-li derivaci v intervalu (a, b), pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.



Tečna grafu v bodě $c \in \{c_1, c_2\}$ je rovnoběžná se spojnicí bodů $[a, f(a)], [b, f(b)]$.

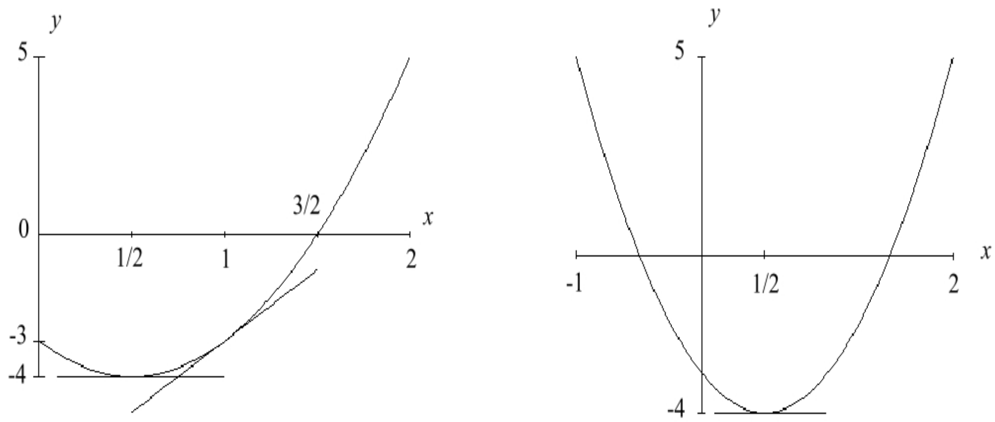
$\surd\surd$ **Komentář 2.3.1:** Místo teoretického zdůvodňování platnosti jednotlivých tvrzení si pouze ukážeme jejich interpretaci na konkrétní funkci. Mějme funkci $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$, $x \in < 0, 2 >$.

1. Protože f je spojitá na intervalu $< 0, 2 >$ a přitom $f(0) = -3$, $f(2) = 5$, tj $f(0) \cdot f(2) < 0$, existuje číslo $c \in (0, 2)$ takové, že $f(c) = 0$. Je to kořen $c = 3/2$ (viz Obr. 2.1 vlevo).

2. Funkce f nabývá v intervalu $< 0, 2 >$ své největší hodnoty $M = f(2) = 5$ a nejmenší hodnoty $m = f(1/2) = -4$ (viz Obr. 2.1 vlevo).

3. Uvažujme nyní funkci $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$ v intervalu $x \in < -1, 2 >$. Pak jsou splněny předpoklady Rolleovy věty včetně rovnosti $f(-1) = f(2)$. Existuje tedy alespoň jeden bod c takový, že $f'(c) = 0$. Jde o bod $c = 1/2$ (viz Obr. 2.1 vpravo).

4. Zvolíme si opět interval $< 0, 2 >$, pak pro funkci $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$ existuje $f'(x) = 8x - 4$ a dle Lagrangeovy věty existuje bod $c \in (0, 2)$ tak, že
   $f(2) - f(0) = f'(c) \cdot (2 - 0)$, tj. $f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2} = 4$. Odtud $8c - 4 = 4$, tedy $c = 1$ (viz Obr. 2.1 vlevo).



Obrázek 2.1:

2.4 Derivace vyšších řádů

Má-li funkce f s definičním oborem $D(f)$ konečnou derivaci $f'(x)$ pro každé x z množiny $M \subset D(f)$, pak pro vnitřní bod $x_0 \in M$ má smysl se ptát, zda funkce f' má v bodě x_0 derivaci, tj. zda existuje

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Pokud existuje, pak ji nazveme **derivací 2. řádu** (druhou derivací) funkce f v bodě x_0 a označíme ji $f''(x_0)$. Analogicky můžeme zavést f''' jako derivaci z funkce f''. Obecně pak pro $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

Δ

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Δ

Je jasné, že k existenci **derivace** n–**tého řádu** je nutná existence nejenom $(n-1)$–ní derivace funkce f, ale i všech předchozích derivací. Aby tato definice byla smysluplná i pro $n = 1$, budeme funkci f označovat za nultou derivaci funkce f. Píšeme $f^{(0)} = f$.

Příklad 2.4.1: Vypočítejte čtvrtou derivaci funkce $f : y = \sin 3x$.

Řešení: Funkce $f(x) = \sin 3x$ má přirozený definiční obor $D(f) = \mathbf{R}$. Pro každé $x \in D(f)$ existuje

$$f'(x) = (\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \cos 3x, \quad D(f') = D(f).$$

Analogicky

$$f''(x) = (3\cos 3x)' = -9\sin 3x, \quad D(f'') = D(f'),$$
$$f'''(x) = (-9\sin 3x)' = -27\cos 3x, \quad D(f''') = D(f''),$$
$$f^{(4)}(x) = (-27\cos 3x)' = 81\sin 3x, \quad D(f^{(4)}) = D(f''') = \mathbf{R}.$$

Cvičení 2.4.1: Vypočítejte druhou derivaci funkce f a výsledek upravte. Najděte obory $D(f),\ D(f'')$.

1) $f(x) = \ln \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ 2) $f(x) = \operatorname{arctg}\,(x - \sqrt{x^2+1})$
3) $f(x) = x \cdot (-1 + \ln x)$ 4) $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$

2.5 Diferenciály vyšších řádů

Má-li funkce f v bodě x_0 (vlastní) derivaci $f^{(n)}(x_0)$, pak funkci g, pro kterou platí

$$g(h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n,\ h \in \mathbb{R},$$

nazýváme *diferenciálem n–tého řádu* funkce f v bodě x_0 nebo stručněji n–tým diferenciálem funkce f v bodě x_0. Hodnotu $g(h)$ značíme $\mathrm{d}^n f(x_0, h)$ a platí tedy

$$\mathrm{d}^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n,\ h \in \mathbb{R}.$$

Definice 2.5.1: Existuje-li (vlastní) n–tá derivace $f^{(n)}$ na množině $M \subset D(f)$, pak je na množině $M \times \mathbb{R}$ definovaná funkce dvou proměnných x a h, kde $x \in M$, $h \in \mathbb{R}$, kterou nazýváme **diferenciálem n–tého řádu** funkce f (nebo též n–tým diferenciálem funkce f). Označujeme jej

$$\mathrm{d}^n f(x, h) = f^{(n)}(x) \cdot h^n,\ x \in M,\ h \in \mathbb{R}.$$

Při pevně zvoleném h pak píšeme jen $\mathrm{d}^n f(x_0)$.

△

Poznámka: Pokud budeme při výpočtech diferenciálů vyšších řádů ($n \geq 2$) uvažovat tentýž konstantní přírůstek h nezávisle proměnné x, pak můžeme diferenciál n–tého řádu (za předpokladu existence vlastních derivací funkce f v bodě x až do řádu n) vyjádřit rekurentně vztahem

$$\mathrm{d}^n f(x, h) = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}^{n-1} f(x, h)\right).$$

Příklad 2.5.1: Vypočtěte $\mathrm{d}^3 f(2, 0.3)$, jestliže $f(x) = \log(2x - 1)$.

Řešení: Určíme derivace

$$f'(x) = \frac{2}{(2x-1)\cdot \ln 10}, \; f''(x) = \frac{-4}{(2x-1)^2 \cdot \ln 10}, \; f'''(x) = \frac{16}{(2x-1)^3 \cdot \ln 10}.$$

Pak

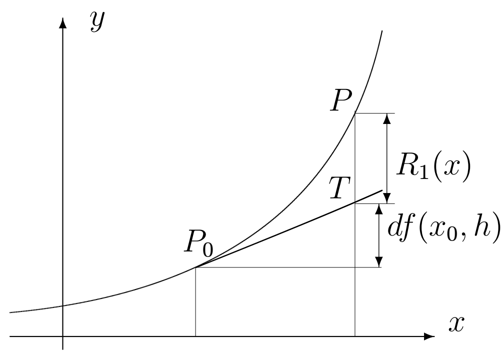
$$\mathrm{d}^3 f(2, 0.3) = f'''(2) \cdot (0.3)^3 = \frac{16}{27 \cdot \ln 10} \cdot 27 \cdot 10^{-3} = \frac{16}{1000 \cdot \ln 10}.$$

Cvičení 2.5.1: Pro danou funkci f vypočítejte předepsané diferenciály.

1) $\mathrm{d}^3 f(x_0, h)$ pro $f(x) = \ln(1 + 2x)$
2) $\mathrm{d}^2 f(2, h)$ pro $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
3) $\mathrm{d}^2 f(0, h)$ pro $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

2.6 Taylorův polynom

Při výkladu diferenciálu jsme využili existence vlastní derivace $f'(x_0)$ a aproximovali jsme lokálně zadanou funkci f polynomem 1. stupně (pokud $f'(x_0) \neq 0$). Platí přitom rovnice $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x)$, kde $R_1(x)$ je zbytek (chyba), která vznikne nahrazením přírůstku funkčních hodnot přírůstkem na tečně (diferenciálem $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h$).



Dále je splněno

$$\lim_{x \to x_0} R_1(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0,$$

což znamená, že chyba jde k nule „rychleji“ než přírůstek nezávisle proměnné x.

Tento fakt potvrzuje rozumnost – smysluplnost naší aproximace. Všimněme si, že při označení $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ platí $T_1(x_0) = f(x_0)$, $T_1'(x_0) = f'(x_0)$. Tyto rovnosti nám zaručily, že zmiňovaná tečna se „přimyká“ v dostatečně malém okolí bodu P_0 ke grafu funkce f „lépe“, než jakákoliv jiná přímka $p \neq t$ (jde o tzv. nejlepší lokální lineární aproximaci). Dá se očekávat, že pokud chceme dosáhnout vyšší přesnosti aproximace, můžeme použít polynomy vyšších stupňů, přičemž budeme požadovat, aby se rovnaly funkční hodnoty a hodnoty derivací v bodě x_0 hledaného polynomu a zadané funkce.

Příklad 2.6.1: Jaké koeficienty musí mít polynom T_n nejvýše n–tého stupně, má-li platit $T_n(x_0) = f(x_0)$, $T_n'(x_0) = f'(x_0)$, $\ldots$, $T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$?

Řešení: Uvažujme polynom T_n ve tvaru

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots + a_n(x - x_0)^n.$$

Pak

$$T_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$T_n''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$T_n'''(x) = 6a_3 + 24a_4(x - x_0) + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}.$$

Z požadovaných rovností pak dostáváme

$$T_n(x_0) = f(x_0) \Longrightarrow a_0 = f(x_0),$$

$$T_n'(x_0) = f'(x_0) \Longrightarrow a_1 = f'(x_0),$$

$$T_n''(x_0) = f''(x_0) \Longrightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2} = \frac{f''(x_0)}{2!},$$

$$T_n'''(x_0) = f'''(x_0) \Longrightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{6} = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Pomocí dalších vyšších derivací bychom ukázali, že platí

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Cvičení 2.6.1: Potvrďte správnost vztahu $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ pro $k = 4, 5$.

Provedené úvahy nás opravňují k následující definici.

Definice 2.6.1: *Má-li funkce f v bodě x_0 derivace až do řádu n, pak polynom*

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= T_n(f, x_0, x - x_0),$$

kde $x_0, x \in \mathbb{R}$, se nazývá Taylorův polynom *stupně n funkce f v bodě x_0. Funkci R_n, definovanou vztahem $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ nazýváme* zbytkem *řádu n. Je-li $x_0 = 0$, pak polynom T_n se někdy nazývá* Maclaurinův *polynom.*

$\triangle$

Nyní si ještě uvedeme *Taylorovu větu*, která uvádí odhad pro zbytek.

Věta: *Má-li funkce f v okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0 derivace až do řádu $n+1$, pak pro bod $x \in \mathcal{U}(x_0)$ platí*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

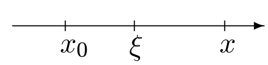
přičemž $R_n(x)$ lze psát ve tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde bod ξ je bod intervalu J s krajními body x_0 a x, tedy $\xi = x_0 + t(x - x_0)$, $0 < t < 1$.

Poznámky:

1. Uvedený tvar zbytku R_n se nazývá *Lagrangeův* tvar zbytku. Pro bod ξ platí: $x_0 \le \xi \le x$



2. Je vhodné si uvědomit, že Taylorův polynom je možné zapsat stručněji užitím diferenciálů ve tvaru

$$T_n(x) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, h) + \frac{\mathrm{d}^2 f(x_0, h)}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^n f(x_0, h)}{n!},$$

kde $h = x - x_0$.

3. Pro zbytek R_n v Taylorově větě platí vztah

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x) - T_n(f, x_0, h)}{|h|^n} = \lim_{h \to 0} \frac{R_n(f, x_0, h)}{|h|^n} = 0,$$

kde $h = x - x_0$. Lze tedy říci, že zbytek R_n konverguje pro $h \to 0$ k nule rychleji, než-li n–tá mocnina absolutní hodnoty přírůstku h nezávisle proměnné x.

Příklad 2.6.2: Vyjádřete funkci $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ jako polynom v proměnné $x - 1$.

Řešení: Stačí určit Taylorův polynom čtvrtého stupně v bodě $x_0 = 1$. Platí

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \Longrightarrow f(1) = 5,$$

$$f'(x) = 4x^3+3x^2+2x+1 \Longrightarrow f'(1) = 10 \Longrightarrow \mathrm{d}f(1, x-1) = \frac{f'(1)}{1!}(x-1) = 10(x-1),$$

$$f''(x) = 12x^2+6x+2 \Longrightarrow f''(1) = 20 \Longrightarrow \mathrm{d}^2 f(1, x-1) = \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 10(x-1)^2,$$

$$f'''(x) = 24x + 6 \Longrightarrow f'''(1) = 30 \Longrightarrow \mathrm{d}^3 f(1, x - 1) = \frac{f'''(1)}{3!}(x - 1)^3 = 5(x - 1)^3,$$

$$f^{(4)}(x) = 24 \Longrightarrow \mathrm{d}^4 f(1, x - 1) = \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x - 1)^3 = (x - 1)^4.$$

Odtud

$$T_4(f, 1, x - 1) = 5 + 10(x - 1) + 10(x - 1)^2 + 5(x - 1)^3 + (x - 1)^4.$$

Je jasné, že polynomy se sobě rovnají, neboť $f^{(5)}(x) = 0$ a tedy zbytek je nulový. O rovnosti polynomů se můžete snadno přesvědčit úpravou nalezeného Taylorova polynomu na tvar zadané funkce f.

Příklad 2.6.3: Určete Taylorův polynom n–tého stupně funkce $f(x) = \ln(2 - 3x)$ v bodě $x_0 = -1$.

Řešení:

$$f(x) = \ln(2 - 3x),\ f'(x) = -\frac{3}{2 - 3x},\ f''(x) = -\frac{3^2}{(2 - 3x)^2},\ f'''(x) = -\frac{3^3 \cdot 2}{(2 - 3x)^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{3^4 \cdot 3 \cdot 2}{(2 - 3x)^4},\ f^{(5)}(x) = -\frac{3^5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{(2 - 3x)^5},\ \ldots, f^{(n)}(x) = -\frac{3^n \cdot (n - 1)!}{(2 - 3x)^n},$$

proto

$$f(-1) = \ln 5,\ f'(-1) = -\frac{3}{5},\ f''(-1) = -\left(\frac{3}{5}\right)^2,\ \ldots, f^{(n)}(-1) = -\left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot (n-1)!.$$

Odtud

$$T_n(f, -1, x+1) = \ln 5 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \frac{(k - 1)!}{k!} \cdot (x+1)^k = \ln 5 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{5}\right)^k \frac{1}{k}(x+1)^k.$$

Důkladně si tento příklad propočítejte a promyslete. Můžete se na něm hodně naučit. Všimněte si toho, že není vhodné při výpočtu derivací konstanty roznásobovat, nýbrž naopak, je zapotřebí je vyjádřit v takovém tvaru, který nám umožní popsat obecně derivaci n–tého řádu.

Příklad 2.6.4: Určete Maclaurinův polynom n–tého stupně funkce $f(x) = \sin x$.

Řešení:

$$f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x,$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x$$

a derivace se opakují,

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(x) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(5)}(0) = 1,\ \dots\ .$$

Tedy

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sin\xi \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!},\ \text{odtud}\ |R_{2n+1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Cvičení 2.6.2: Ověřte, že platí

a)

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x),\ \text{kde}\ R_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sin\xi \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

b)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x),\ \text{kde}\ R_n(x) = \frac{e^{\xi} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Cvičení 2.6.3: Určete Taylorův (Maclaurinův) polynom funkce f v bodě x_0 stupně n, je-li:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 0$, $n = 3$,

b) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $n = 2$,

c) $f(x) = xe^x$, $x_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

2.7 L'Hospitalovo pravidlo

Při dosavadních výpočtech limit podílu funkcí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},\ \text{kde}\ \lim_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

jsme využívali různých úprav (krácení, rozšiřování zlomků apod.) pro zjednodušení podílu funkcí $\frac{f(x)}{g(x)}$. Při výpočtu limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},\quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

nám však tyto úpravy nepomohou. Přitom jde o limity výše uvedeného typu, kde ve všech třech podílech je $f(x_0)=0$, $g(x_0)=0$ a přitom existují derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ a $g'(x_0)\neq 0$. Pak ale platí

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{x-x_0}}{\frac{g(x)}{x-x_0}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Vidíme tedy, že se nám podařilo využít derivace funkcí f,g pro zjednodušení výpočtu zadané limity, například

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{f'(1)}{g'(1)}=1.$$

Cvičení 2.7.1: Vypočtěte uvedeným způsobem zbývající dvě limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Naše úvahy o využití derivací funkcí f a g pro výpočet limit podílu funkcí f/g se dají zobecnit následovně:

Věta (L'Hospitalovo pravidlo): *Mají-li funkce f a g v prstencovém okolí bodu $x_0\in\mathbb{R}$ konečné derivace a platí-li navíc*

$$\begin{array}{ll} & \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0\\ \textit{nebo} & \lim_{x\to x_0}|g(x)|=\infty\end{array}$$

*pak **z existence limity** $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **plyne existence** $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ a platí rovnost*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{LP}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pro $x_0\in\mathbb{R}$ platí tvrzení vety také pro jednostranné limity.

Cvičení 2.7.2: Řešené příklady:

1.

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\cos\pi x}{\ln\frac{2}{3}x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LP}{=}-\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\pi\cdot\sin\pi x}{\frac{1}{x}}=-\pi\cdot\lim_{x\to\frac{3}{2}}x\sin\pi x=\frac{3}{2}\pi.$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{LP}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\cdot\ln 2}{3x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{LP}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\cdot\ln^2 2}{6x}=$$
$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{LP}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\cdot\ln^3 2}{6}=\infty$$

Všimněte si, že při použití l'Hospitalova pravidla zvlášť derivujeme čitatele a zvlášť jmenovatele zlomku. Nederivujeme tedy f/g jako podíl.

Další časté případy limit typů $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ se většinou snažíme algebraickými úpravami převést na typ $0/0$ nebo ∞/∞.

3.

$$\lim_{x\to 0_+}\sqrt[3]{x^2}\ln x=[0\cdot(-\infty)]=\lim_{x\to 0_+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]\overset{LP}{=}\lim_{x\to 0_+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}}=$$
$$=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0_+}\sqrt[3]{x^2}=0.$$

4.

$$\lim_{x\to 2_+}\left(\frac{1}{\ln(x-1)}-\frac{1}{x-2}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 2_+}\frac{x-2-\ln(x-1)}{(x-2)\ln(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$\overset{LP}{=}\lim_{x\to 2_+}\frac{1-\frac{1}{x-1}}{\frac{x-2}{x-1}+\ln(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LP}{=}\lim_{x\to 2_+}\frac{\frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 2_+}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}.$$

5.

$$\lim_{x\to\infty}\left((x-4)e^{\frac{1}{2-x}}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\left(-4e^{\frac{1}{2-x}}+x(-1+e^{\frac{1}{2-x}})\right)=$$
$$=-4+\lim_{x\to\infty}\frac{-1+e^{\frac{1}{2-x}}}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LP}{=}-4+\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(2-x)^2}e^{\frac{1}{2-x}}}{-\frac{1}{x^2}}=$$
$$=-4-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(2-x)^2}e^{\frac{1}{2-x}}\right)=-4-1=-5.$$

$\surd\surd$ **Komentář 2.7.1:**

- Je třeba vždy nejprve ověřit, zda jsou splněny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla. Stává se, že l'Hospitalovo pravidlo je nesprávně použito k výpočtu limit typu $\frac{k}{0}$, kde $k\neq 0$, $k\in\mathbb{R}$. Výsledky jsou pak zcela chybné, jak se o tom můžete přesvědčit na jednostranné limitě $\lim_{x\to 0_+}\frac{1}{x}$, kdy nesprávným použitím pravidla dostaneme limitu rovnou nule. Správný výsledek je ovšem ∞.

- Někdy jsou splněny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla, ale pokus o jeho použití nevede k cíli. Například

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

- Dokonce se může stát, že $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ <u>neexistuje</u> a přitom $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ <u>existuje</u>, například pro $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5\sin x}{3x+4\cos x}$ typu $\frac{\infty}{\infty}$ je $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+5\cos x}{3-4\sin x}$ a limity čitatele a jmenovatele neexistují. Platí však

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5\sin x}{3x+4\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+5\frac{\sin x}{x}}{3+4\frac{\cos x}{x}}=\frac{2}{3}.$$

- V některých případech vede použití l'Hospitalova pravidla k limitám složitějších funkcí, jak ukazuje příklad

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{e^{-1/x^2}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0_+}\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}.$$

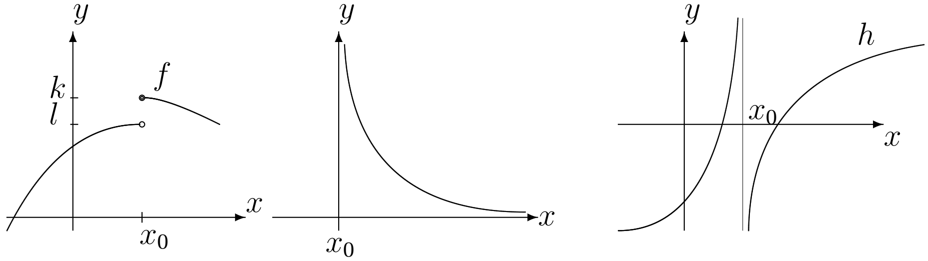
Cvičení 2.7.3: Užitím l'Hospitalova pravidla najděte limity:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{arctg}\,x}{x^3}$
2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$
4) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+x)}{4^{2x}-3}$

2.8 Asymptoty grafu funkce

Pro zakreslení grafů funkcí je užitečné získat bližší informace o chování zadaných funkcí v prstencových okolích „problémových bodů", k nimž zejména patří

1. body x_0, pro které je funkce definována alespoň v jejich jednostranném prstencovém okolí a je přitom v tomto okolí neohraničená.



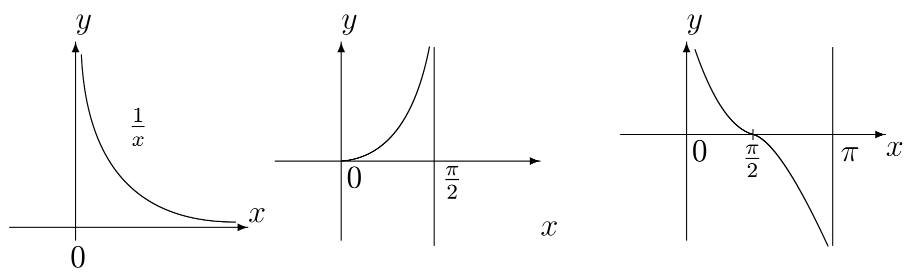
2. body nevlastní ∞ a $-\infty$.

Svislé asymptoty grafu funkce

Z kapitoly o limitách víme, že informace tohoto typu nám poskytují znalosti limit (i jednostranných) funkcí v uvedených bodech. Při vyšetřování některých jednoduchých limit jsme vycházeli ze známých grafů elementárních funkcí. Víme již, že například

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = \infty, \quad \lim_{x\to \pi_-} \operatorname{cotg} x = -\infty.$$

Uvedené funkce mají v příslušných prstencových okolích následující přibližné grafy:



Všimněme si, že například existence nevlastní levostranné limity funkce tg v bodě $\pi/2$, tj. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}_-} \operatorname{tg} x = \infty$, vlastně mj. znamená, že funkce tg je v $\mathcal{P}^-(\pi/2)$ neohraničená a že graf funkce tg se „neomezeně blíží“ ke grafu přímky o rovnici $x = \pi/2$. Tuto přímku nazveme svislou (vertikální) asymptotou grafu funkce $f : y = \operatorname{tg} x$. Odtud se dostáváme k definici:

Definice 2.8.1: *Přímku o rovnici $x = x_0,\ x_0 \in \mathbb{R}$, nazveme svislou asymptotou grafu funkce f v bodě x_0, jestliže f má v bodě x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu*

$$\lim_{x\to x_{0+}} f(x), \quad \lim_{x\to x_{0-}} f(x)$$

nevlastní.

△

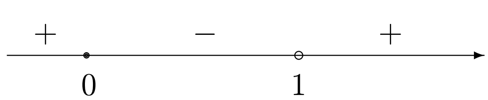
Příklad 2.8.1: Určete svislé asymptoty grafů funkcí

$$a)\ f : y = \frac{x}{x-1}, \quad b)\ g : y = xe^{1/x^2}.$$

Řešení:

a) Funkce f není definována v bodě $x_0 = 1$. Na základě znaménka funkce f a věty o limitě typu „$a/0$“, $a \neq 0$, dostáváme

znam $f(x)$



a existují dokonce obě limity $\lim_{x\to x_{1+}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_{1-}} f(x) = -\infty$ nevlastní. Přímka $x = 1$ je tedy svislou asymptotou grafu funkce f v bodě 1.

b) Funkce g není definována v bodě $x_0 = 0$. Je jasné, že $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ a $\lim_{x\to 0} e^{1/x^2} = \infty$. Dostáváme tedy limitu typu $0 \cdot \infty$, což je neurčitý výraz. Upravíme proto zadanou funkci na tvar

$$\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}$$

a odtud

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{2e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0_-} \frac{2e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = -\infty.$$

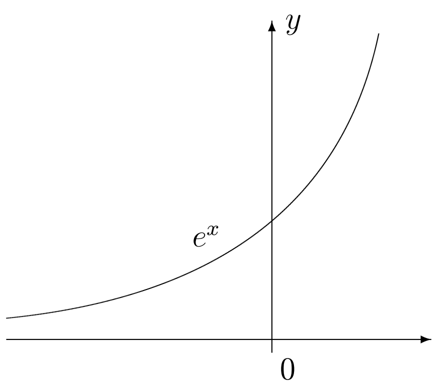
Přímka o rovnici $x = 0$ je svislou asymptotou grafu funkce g v bodě 0.

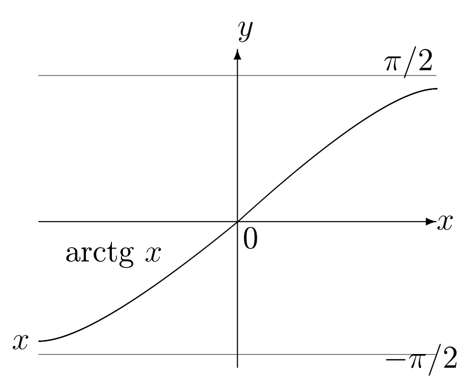
Cvičení 2.8.1: Určete svislé asymptoty grafů funkcí

$$a)\ f : y = \frac{x^2}{x^2 + 2x}, \quad b)\ g : y = \ln \frac{2x+1}{x-3}.$$

Vodorovné asymptoty grafu funkce

Analogicky např. z přibližných grafů





funkcí e^x, $\operatorname{arctg} x$ víme, že $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$. Vidíme, že tentokrát dostáváme konečné limity v nevlastních číslech. Graficky můžeme tuto situaci znázornit tak, že například pro funkci arctg se graf funkce opět „neomezeně blíží“ ke grafu přímky o rovnici $y = \pi/2$, kterou nazýváme vodorovnou (horizontální) asymptotou grafu funkce $f : y = \operatorname{arctg} x$.

Definice 2.8.2: *Přímku o rovnici $y = d$, $d \in \mathbb{R}$, nazveme vodorovnou (horizontální) asymptotou grafu funkce f v bodě ∞ (event. v $-\infty$), jestliže*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = d, \ (\textit{event.} \lim_{x\to-\infty} f(x) = d).$$

△

Příklad 2.8.2: Určete vodorovné asymptoty (existují-li) grafů funkcí

$$a)\ f : y = \frac{3x-1}{2x+5}, \quad b)\ g : y = 2 - 3e^{2x}.$$

Řešení:
a) Z teorie limit víme, že

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-1}{2x+5} = \frac{3}{2}.$$

Přímka o rovnici $y = 3/2$ je tedy vodorovnou asymptotou grafu funkce f v bodě ∞ i v bodě $-\infty$.

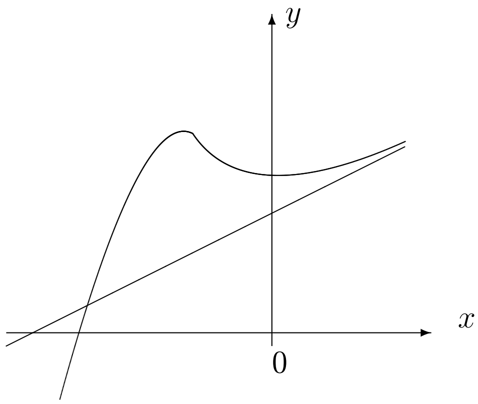
b) $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ a proto graf funkce g nemá v bodě ∞ vodorovnou asymptotu. Pro bod $-\infty$ dostáváme $\lim_{x\to-\infty}(2 - 3e^{2x}) = 2$ a proto přímka $y = 2$ je horizontální asymptotou grafu funkce g v bodě $-\infty$.

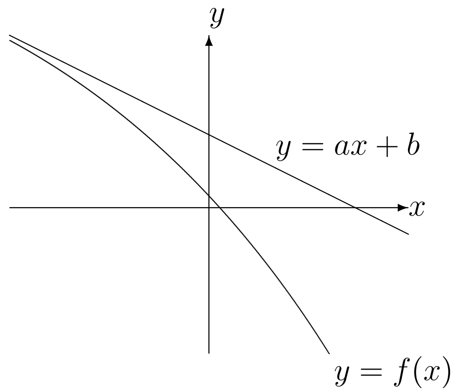
Cvičení 2.8.2: Určete vodorovné asymptoty (existují-li) grafů funkcí

$$a)\ f : y = \frac{3x^2}{2x(3x-1)}, \quad b)\ g : y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{2-x}.$$

Šikmé asymptoty grafu funkce

Může se však stát, že například limita funkce f v nevlastním bodě ∞ (nebo $-\infty$) je nevlastní, ale přitom existuje přímka o rovnici $y = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, k níž se opět graf funkce „neomezeně blíží“ v nějakém prstencovém okolí některého z nevlastních bodů. Pak říkáme, že lineární funkce $g : y = ax + b$ je šikmou asymptotou grafu funkce f v příslušném nevlastním bodě.





Definice 2.8.3: *Lineární funkci $g : y = ax + b,\ a \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$, nazveme šikmou asymptotou grafu funkce f v bodě ∞, jestliže*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

$\triangle$

Cvičení 2.8.3: Definujte šikmou asymptotu grafu funkce f v bodě $-\infty$.

$\surd\surd$ **Komentář 2.8.1:** V rovnici šikmé asymptoty se vyskytují dvě neznámé konstanty. Ukažme si, jak je můžeme vypočítat. Je-li g asymptotou grafu funkce f, pak podle definice platí $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$. Protože $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, pak $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b))\frac{1}{x} = 0$. Odtud dostáváme $\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x})) = 0$ a tedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

Ze vztahu $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ dále plyne, že

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax).$$

Obráceně, jestliže $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a,\ b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)$, pak $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0$ a tedy funkce $g : y = ax + b$ je šikmou asymptotou grafu funkce f v bodě ∞.

Platí tedy následující tvrzení.

Věta: *Funkce $g : y = ax + b,\ a \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$, je šikmou asymptotou grafu funkce f v bodě ∞, právě tehdy, když platí*

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax).$$

Příklad 2.8.3: Určete šikmé asymptoty (existují-li) ke grafům funkcí

$$a)\ f:y=\frac{x^2}{2x-1},\quad b)\ f:y=\frac{x^2+\sqrt{x^2-1}}{x},\quad c)\ f:y=\frac{e^x}{x}.$$

Řešení:

a) Protože máme najít (pokud existují) šikmé asymptoty, budeme se zabývat chováním funkce v okolích nevlastních bodů ∞ nebo $-\infty$. Funkce je v okolích těchto bodů definovaná a má tedy smysl počítat výše uvedené limity. Dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(2x-1)}=\frac{1}{2}=a.$$

Dále

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-1}-\frac{x}{2}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x^2+x}{4x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4x-2}=\frac{1}{4}.$$

Přímka o rovnici $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ je tedy šikmou asymptotou grafu funkce $f:y=\frac{x^2}{2x-1}$ v bodě ∞. Z rozboru počítaných limit zjistíme, že pro nevlastní bod $-\infty$ obdržíme stejné výsledky jako pro bod ∞. Přímka

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

je proto šikmou asymptotou grafu funkce f v bodech $\pm\infty$.

b) Nyní již uvedeme stručnější výpočty:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^2-1}}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}\right)=1=a,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]\stackrel{!!}{=}$$

$$\stackrel{!!}{=}-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=-1.$$

Přímka $y=x-1$ je asymptotou grafu funkce f v bodě $-\infty$.

Komentáře:

1. Jsou časté pokusy řešit limitu $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ užitím l'Hospitalova pravidla. Zkuste si sami ověřit, že tento postup nevede k úspěšnému výpočtu.

2. Rovnost $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$ při výpočtu limity je dána skutečností, že $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ pro $x < 0$.

Jako cvičení vypočtěte šikmou asymptotu funkce $f(x) = \frac{x^2+\sqrt{x^2-1}}{x}$ v bodě ∞.

c) Protože $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$, má funkce f v bodě $-\infty$ vodorovnou asymptotu $y = 0$ jako speciální případ $y = 0x + 0$ asymptoty šikmé.

V nevlastním bodě ∞ dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{LP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Odtud plyne, že v bodě ∞ nemá funkce šikmou asymptotu (neboť konstanty $a, b \in \mathbb{R}$ musí být konečná reálná čísla).

Cvičení 2.8.4: Určete šikmé asymptoty (existují-li) grafů funkcí

$$a)\ f : y = \frac{2x^3+3x^2}{3x^2-1}, \quad b)\ f : y = \sqrt{x^2-1}, \quad c)\ f : y = x \ln \frac{2x}{x+1}.$$

2.9 Extrémy funkce

V mnoha praktických úlohách je zapotřebí zjišťovat extremální hodnoty příslušných funkčních závislostí. Tato problematika je elementárním základem tzv. optimalizačních úloh, které hrají důležitou roli v aplikacích matematiky při řešení různých praktických problémů.

Cíl: Zvládnout problematiku určování extrémů funkcí, kterou budeme používat při vyšetřování průběhů funkcí.

Potřebné znalosti: Umět dobře derivovat a určovat znaménka funkcí, znát definici derivace a Lagrangeovu větu.

Nejprve si popíšeme vlastnost „funkce rostoucí v bodě“.

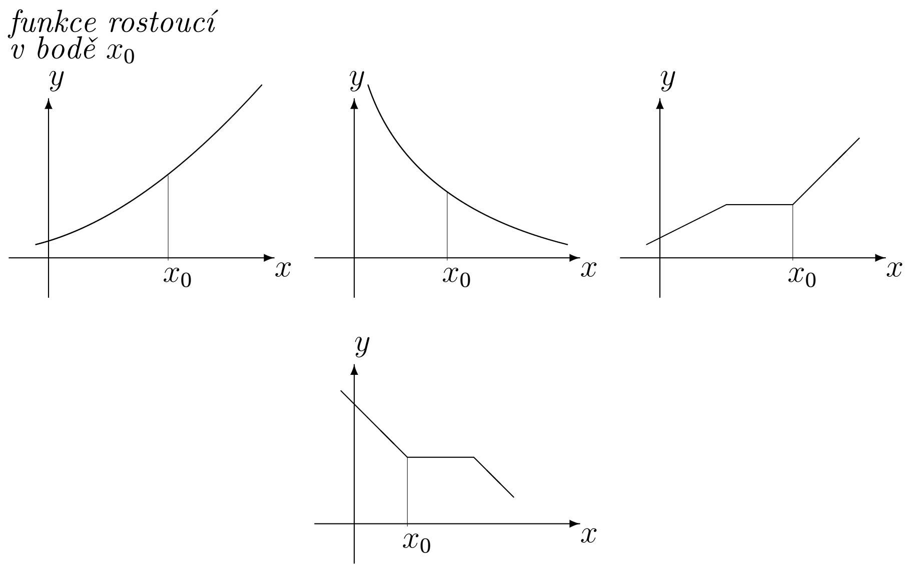
Definice 2.9.1: Řekneme, že funkce f je rostoucí v bodě x_0, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset D(f)$ takové, že

pro libovolné $x_1 < x_0$, $x_1 \in \mathcal{U}(x_0)$ je $f(x_1) < f(x_0)$

a pro libovolné $x_2 > x_0$, $x_2 \in \mathcal{U}(x_0)$ je $f(x_2) > f(x_0)$.

△

Cvičení 2.9.1: Zformulujte si sami vlastnosti: klesající, neklesající, nerostoucí funkce v bodě x_0 a přiřaďte odpovídající názvy ke zbývajícím obrázkům.



Tyto vlastnosti úzce souvisí s hodnotou derivace $f'(x_0)$ (pokud existuje). Platí následující důležité tvrzení, které budeme opakovaně využívat při zdůvodňování dalších výsledků (cílem je mimo jiné: umět tvrzení „odvodit“).

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci $f'(x_0) > 0$, pak je funkce v bodě x_0 rostoucí.

Je tomu tak proto, že z podmínky $f'(x_0) > 0$ dostaneme z definice derivace, že $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) > 0$. Existuje tedy okolí $\mathcal{P}(x_0)$ takové, že

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0.$$

Tato nerovnice bude splněna, pokud buď $x - x_0 > 0$ a současně $f(x) - f(x_0) > 0$ nebo $x - x_0 < 0$ a současně $f(x) - f(x_0) < 0$. Když $x > x_0$, pak $f(x) > f(x_0)$ a pro $x < x_0$, je $f(x) < f(x_0)$. To ale znamená, že funkce f je rostoucí v bodě x_0.

Rozšíříme uvedenou vlastnost na interval.

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li v intervalu (a, b) derivaci, která je kladná (záporná), pak je f rostoucí (klesající) na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Je-li totiž například $f'(x) > 0$ na (a, b) a $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2$, pak podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (x_1, x_2)$ tak, že $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ a odtud $f(x_2) > f(x_1)$. Je tedy f rostoucí na intervalu $\langle a, b\rangle$.

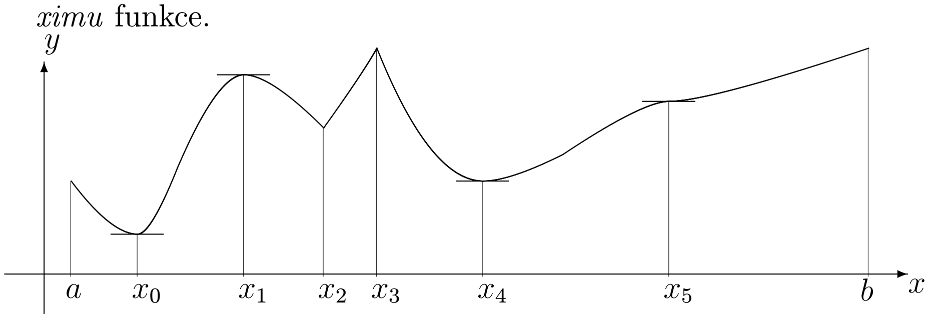
Nyní se dostáváme k definici **lokálních extrémů.**

Definice 2.9.2: *Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ ostré* ***lokální minimum*** *(ostré* ***lokální maximum****), jestliže existuje okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta) \subset D(f)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ platí $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0)$.)*

$\triangle$

$\surd\surd$ **Komentář 2.9.1:**

- Pokud platí neostrá nerovnice $f(x) \leq f(x_0)$, hovoříme jen o *lokálním maximu* funkce.



Otázka: Co lze vyčíst z grafu funkce o extremálních hodnotách funkce f na základě našich znalostí o derivacích?

- V bodech x_0, x_1, x_2, x_3 a x_4 nastávají ostré lokální extrémy funkce. Všimněte si toho, že tečny v bodech x_0, x_1, x_4 jsou rovnoběžné s osou x, tj. $f'(x_0) = f'(x_1) = f'(x_4) = 0$. Přitom je vidět, že extrémy nastávají i v bodech x_2 a x_3, v nichž zřejmě derivace neexistují.

- Je třeba si uvědomit, že také v bodě x_5 je tečna rovnoběžná s osou x, tj. $f'(x_5) = 0$, i když v tomto bodě extrém nenastává. Graf funkce se v bodech x_4 a x_5 liší například tím, že existují okolí těchto bodů taková, že v okolí bodu x_4 funkce „nejprve klesá a pak roste“ (derivace funkce mění znaménko), kdežto v okolí bodu x_5 funkce „stále roste“ (derivace funkce nemění znaménko)

- Z příkladu je vidět, že funkce <u>může</u> mít lokální extrémy

  a) v bodech, v nichž $f'(x) = 0$,

  b) v bodech, v nichž f nemá derivaci.

- *Body, v nichž $f'(x) = 0$, se nazývají <u>stacionární</u>.*

Pro hledání extrémů platí tato důležitá tvrzení:

1. *Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém, pak je buď $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.*
2. *Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ tak, že f je v $\mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ rostoucí (klesající) a v $\mathcal{P}^+(x_0, \delta)$ klesající (rostoucí), pak f má v bodě x_0 ostré lokální maximum (minimum).*
3. *Je-li $f'(x_0) = 0$ a má-li funkce funkce f v bodě x_0 druhou derivaci $f''(x_0) \neq 0$, pak má f v bodě x_0 ostrý lokální extrém a to minimum v případě $f''(x_0) > 0$, maximum v případě $f''(x_0) < 0$.*

Tvrzení (1) je tzv. *nutná podmínka* existence lokálního extrému, tvrzení (2), (3) jsou tzv. *postačující podmínky* pro existenci lokálního extrému.. První dvě tvrzení zcela odpovídají našim geometrickým představám (viz rozbor grafu). Pokud jde o třetí tvrzení, to plyne z toho, že z existence $f'(x_0)$ plyne spojitost funkce v bodě x_0 a je-li například $f''(x_0) > 0$, pak je funkce f' rostoucí v bodě x_0. To ale znamená, že existuje okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že pro $x \in \mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ platí $f'(x) < f'(x_0) = 0$ a pro $x \in \mathcal{P}^+(x_0, \delta)$ je $f'(x) > f'(x_0) = 0$. Odtud plyne, že f má v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Příklad 2.9.1: Určete lokální extrémy funkcí

$$\text{a) } f(x) = x \ln^2 x, \quad \text{b) } g(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}.$$

Řešení:

a) Funkce f je definovaná v intervalu $(0; \infty)$ a $f'(x) = \ln^2 x + 2 \ln x = (2 + \ln x) \cdot \ln x$. Pro stacionární body platí rovnice $(2 + \ln x) \cdot \ln x = 0$ a tedy $x_1 = e^{-2}$ a $x_2 = 1$. Znaménko $f'(x)$ je

znam $f'(x)$		$\nearrow$ +		$\searrow$ −		$\nearrow$ +
	0	f roste	e^{-2}	f klesá	1	f roste $\quad x$

Protože $f'(x)$ mění v x_1 i x_2 znaménko, má funkce f v bodech x_1 a x_2 lokální extrémy, a to v $x_1 = e^{-2}$ ostré lokální maximum a v bodě $x_2 = 1$ ostré lokální minimum.

b) Pro definiční obor funkce g platí postupně nerovnice $0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1$, $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$ a tedy $x \in < -1, 1 >$. Derivace funkce g je rovna

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{|x| \cdot \sqrt{1 - x^2}}.$$

Odtud $g'(x) = -1/\sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in (0, 1)$, $g'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in (-1, 0)$. Definiční obor funkce g' je $(-1, 0) \cup (0, 1)$ a pro znaménko $g'(x)$ platí

znam $g'(x)$	-1	$\nearrow$ +	0	$\searrow$ −	1	x

Funkce g je v bodě $x = 0$ definována a má v něm ostré lokální maximum (viz 2. vlastnost pro určení extrémů).

Příklad 2.9.2: Určete poloměr r a výšku h rotačního válce, který má při zadaném objemu V minimální povrch S.

Řešení: Protože známe objem válce V, můžeme vyjádřit ze vztahu $V = \pi r^2 h$ výšku $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Povrch S je pak roven

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Nyní budeme hledat takové r, při kterém funkce S nabývá minimální hodnoty. Z derivace $S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right)$ dostaneme stacionární bod $r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Pro $S''(r_1)$ platí

$$S''(r_1) = 4\pi + \frac{4V}{r_1^3} > 0 \ \text{ pro } r_1 > 0,\ V > 0.$$

Funkce S má tedy v bodě $r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ostré lokální minimum (viz 3. vlastnost pro určování extrémů). Při této hodnotě r_1 je povrch S minimální. Pro výšku h_1 máme

$$h_1 = \frac{V}{\pi r_1^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r_1.$$

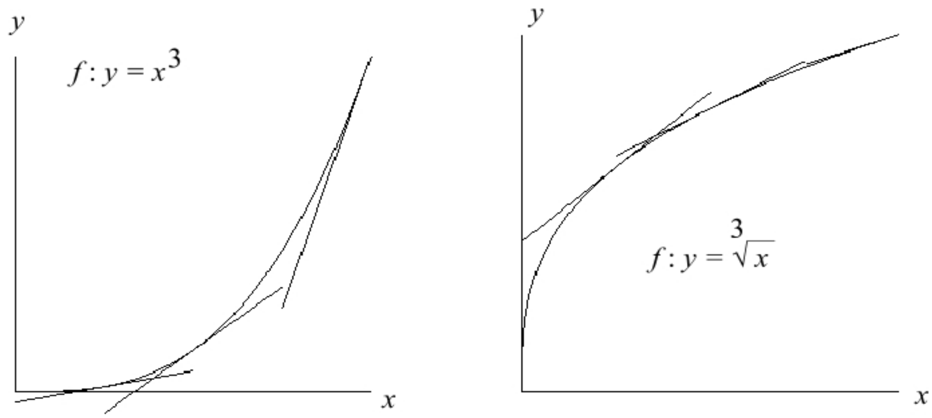
2.10 Funkce konvexní a konkávní

Zavedeme ještě pojem konvexnosti a konkávnosti, který nás bude u funkcí majících derivaci informovat „o prohnutí“ grafu funkce.

Chceme-li například nakreslit grafy funkcí určených předpisy $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ v intervalu $(0, \infty)$, pak zjistíme, že obě funkce jsou spojité a rostoucí. Jejich grafy se však liší tím, že graf funkce f „leží nad tečnou“, kdežto graf funkce g „leží pod tečnou“ grafu funkce sestrojenou v libovolném bodě grafu příslušné funkce.

Definice 2.10.1: Má-li funkce f derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak řekneme, že f je **ryze konvexní** v bodě x_0, jestliže existuje okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ platí $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, tj. graf funkce f leží v $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ nad tečnou sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

△



Obrázek 2.2:

$\surd\surd$ Komentář 2.10.1:

- Změníme-li nerovnici na opačnou, dostaneme definici **ryzí konkávnosti** (tj. graf je pod tečnou).
- Připustíme-li neostré nerovnice, dostaneme definici konkávnosti event. konvexnosti v bodě x_0.

Pro ověření těchto vlastností máme k dispozici následující tvrzení.

> *Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ druhou derivaci $f''(x_0)$, pak je-li $f''(x_0) > 0$, je f v bodě x_0 ryze konvexní.*

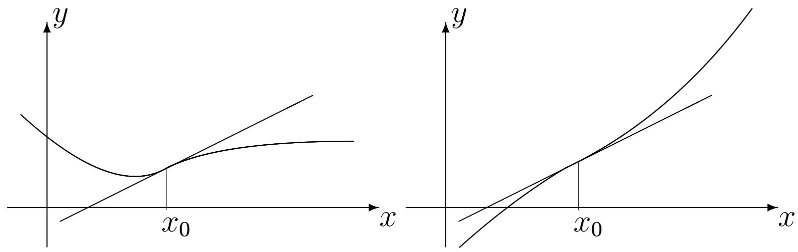
Je tomu tak proto, že v nějakém $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ platí

$$\underbrace{\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{f'(c)(x-x_0)}}_{\text{dle Lagrangeovy věty}} - f'(x_0)(x-x_0) = \underbrace{(f'(c)-f'(x_0))(x-x_0) > 0}_{f' \text{ je rostoucí v bodě } x_0}$$

Je tedy $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ pro $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ a f je ryze konvexní v bodě x_0.

$\surd\surd$ Komentář 2.10.2:

- Má-li funkce na intervalu $J \subseteq D(f)$ derivaci druhého řádu f'' a platí-li $f''(x) > 0$ na J, pak řekneme, že f *je ryze konvexní na* J.
- Jestliže v bodech dostatečně blízkých bodu x_0 přechází graf z polohy nad tečnou do polohy pod tečnou (nebo obráceně), nazveme bod x_0 inflexním bodem.



Pro inflexní body platí:

1. *Je-li x_0 inflexní bod funkce f a existuje-li $f''(x_0)$, pak je $f''(x_0) = 0$.*

2. *Má-li funkce f spojitou derivaci f' na $\mathcal{U}(x_0, \delta)$ a platí-li $f''(x_0) < 0$ pro $x \in \mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ a $f''(x_0) > 0$ pro $x \in \mathcal{P}^+(x_0, \delta)$ nebo naopak, pak je x_0 inflexní bod funkce f.*

3. Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak je x_0 inflexní bod funkce f.

Tvrzení (3) opět plyne z toho, že například pro $f'''(x_0) > 0$, je f'' rostoucí funkcí v bodě x_0. Odtud pro $x \in \mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ je $f''(x) < f''(x_0) = 0$ a pro $x \in \mathcal{P}^+(x_0, \delta)$ je $f''(x) > f''(x_0) = 0$. Tedy x_0 je inflexní bod.

2.11 Průběh funkce

Cíl: Užitím diferenciálního počtu umět vyjádřit průběhy a nakreslit grafy funkcí. O složitosti a tvarech těchto funkcí získáte nejlépe představu ze skript Sbírka příkladů z matematiky I - kapitola Průběh funkce.

Δ

1. Získáme o funkci f co nejvíce užitečných informací přímo ze zadání. V závislosti na druhu a složitosti funkčního předpisu určíme definiční obor, znaménko $f(x)$, sudost, lichost, periodičnost funkce, průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami.

2. Vypočteme $f', D(f')$, určíme znaménko $f'(x)$, intervaly monotonie, funkční hodnoty v extremálních bodech.

3. Určíme $f'', D(f'')$, znaménko $f''(x)$, konvexnost, konkávnost, inflexní body, funkční hodnoty v inflexních bodech.

4. Pokud je definiční obor tvořen otevřenými intervaly, určíme (jednostranné) limity funkce f v jejich krajních bodech (event. včetně nevlastních čísel $\pm\infty$). Nalezneme asymptoty grafu funkce.
5. Načrtneme graf zadané funkce.

Příklad 2.11.1: Vyšetřete průběhy funkcí

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}, \quad \text{b) } g(x) = x^2 e^{-3/x}, \quad \text{c) } h(x) = \arcsin\frac{2}{x}.$$

Řešení: První příklad vyřešíme s podrobnějším komentářem. U zbývajících dvou příkladů budeme již stručnější.

. . . .

$$\textbf{a)} \qquad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4},$$

1. $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$,

znam $f(x)$	$-$	-2	$+$	0	$-$	2	$+$	x

$f(0) = 0$, f je lichá (neboť definiční obor je symetrický vzhledem k počátku a platí $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = -\frac{x^3}{x^2-4} = -f(x)$).

2.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2-12)}{(x^2-4)^2},$$

$D(f') = D(f)$. Na změnu znaménka budou mít vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti čitatele a jmenovatele, tj. kořeny $x_1 = -2\sqrt{3}$ a $x_2 = 2\sqrt{3}$.

znam $f'(x)$	$\nearrow +$	$-2\sqrt{3}$	$\searrow -$	-2	$\searrow -$	2	$\searrow -$	$2\sqrt{3}$	$\nearrow +$

(Při nevynesení bodů ± 2 bychom mohli dojít k chybnému závěru, že funkce f klesá v intervalu $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$.)

f má v bodě $x_1 = -2\sqrt{3}$ ostré lokální maximum a v bodě $x_1 = 2\sqrt{3}$ ostré lokální minimum. Přitom $f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$, $f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$.

3.

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 24x) \cdot (x^2-4)^2 - (x^4 - 12x^2) \cdot 2 \cdot (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{8x^3 + 96x}{(x^2-4)^3} = \frac{8x \cdot (x^2+12)}{(x^2-4)^3},$$

$D(f'') = D(f') = D(f)$, $f''(x)$ bude měnit znaménko v bodech $-2, 0, 2$,

$$\begin{array}{lccccccc} \text{znam } f''(x) & - \frown & & + \smile & & - \frown & & + \smile \\ & \text{pod} & -2 & \text{nad} & 0 & \text{pod} & 2 & \text{nad tečnou} \end{array}$$

inflexní bod $x_3 = 0$.

4. Protože $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$, vyšetříme postupně (jednostranné) limity v bodech $-2, 2, -\infty, \infty$. Vzhledem k tomu, že v bodech $-2, 2$ jde o limity typu $\left[\frac{a}{0}\right]$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, získáme ze znaménka $f(x)$ tyto výsledky pro jednostranné limity.

$$\lim_{x \to -2_-} \frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x \to -2_-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -2_+} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \to 2_-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 2_+} f(x) = \infty.$$

Přímky $x = -2$ a $x = 2$ jsou tedy svislé asymptoty grafu funkce f. V nevlastních číslech $-\infty$ a ∞ platí:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2 \cdot (1 - 4/x^2)} = \lim_{x \to \infty} x = \infty \text{ a } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Pro šikmé asymptoty dostáváme:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{(x^2-4) \cdot x} = 1$$

(viz limity racionálních funkcí v nevlastních číslech),

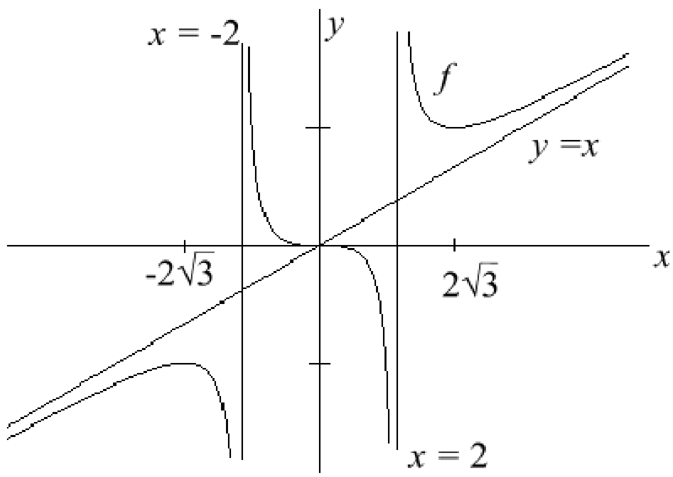
$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0.$$

Přímka o rovnici $y = x$ je tedy šikmou asymptotou grafu funkce f v bodě ∞. Promyslete si sami, že tato přímka je asymptotou i v bodě $-\infty$.

5.

- Na ose x si vyneseme body, které nepatří do $D(f)$, v nichž $f(x) = 0$, ve kterých funkce f, f', f'' mění znaménka.
- V extremálních bodech a v inflexním bodě vyneseme funkční hodnoty.
- Načrtneme asymptoty.

- V jednotlivých podintervalech kreslíme graf funkce f se současnou kontrolou, zda v daném podintervalu vyhovuje graf všem podmínkám, které jsme postupně zjistili (zda je graf nad osou x nebo pod osou x, zda je f rostoucí nebo klesající, zda je f konvexní nebo konkávní).
- Na závěr zkontrolujeme, jestli má graf (2.3) funkce f zjištěné vlastnosti (včetně lichosti) v celém definičním oboru.



Obrázek 2.3:

. . . .

b) $\qquad g(x) = x^2 e^{-3/x},$

1. $D(g) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,

znam $g(x)$	$+$	0	$+$	x

g není sudá ani lichá.

2.

$$g'(x) = e^{-\frac{3}{x}} \cdot (2x + x^2 \cdot \frac{3}{x^2}) = e^{-\frac{3}{x}} \cdot (2x + 3).$$

znam $g'(x)$	$\searrow -$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow +$	0	$\nearrow +$	x

$D(g') = D(g)$,
Funkce g má v bodě $x_1 = -3/2$ ostré lokální minimum. Přitom $g(-3/2) = \frac{9}{4}e^2$.

3.

$$g''(x) = e^{-\frac{3}{x}} \cdot (2 + (2x+3) \cdot \frac{3}{x^2}) = e^{-\frac{3}{x}} \cdot \frac{2x^2+6x+9}{x^2},$$

$D(g'') = D(g') = D(g)$,

znam $g''(x)$ $\quad \smile +$ $\quad 0 \quad$ $\smile +$ $\quad x$

Inflexní bod funkce g nemá.

4.

$$\lim_{x\to 0_+} x^2 e^{-3/x} = 0 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0_-} x^2 e^{-3/x} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0_-} \frac{e^{-3/x}}{\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0_-} \frac{e^{-3/x}\cdot\frac{3}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} =$$

$$= -\frac{3}{2}\lim_{x\to 0_-} \frac{e^{-3/x}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right] \overset{LP}{=} -\frac{3}{2}\lim_{x\to 0_-} \frac{e^{-3/x}\cdot\frac{3}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{9}{2}\lim_{x\to 0_-} e^{-3/x} = \infty.$$

(Limitu je možno jednodušeji spočítat zavedením substituce $t = 1/x$.)

Přímka $x = 0$ je tedy (svislá) asymptota. neboť jedna jednostranná limita je nevlastní. Dále

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-3/x} = \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-3/x} = \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x e^{-3/x} = \pm\infty.$$

Šikmé ani vodorovné asymptoty nejsou.

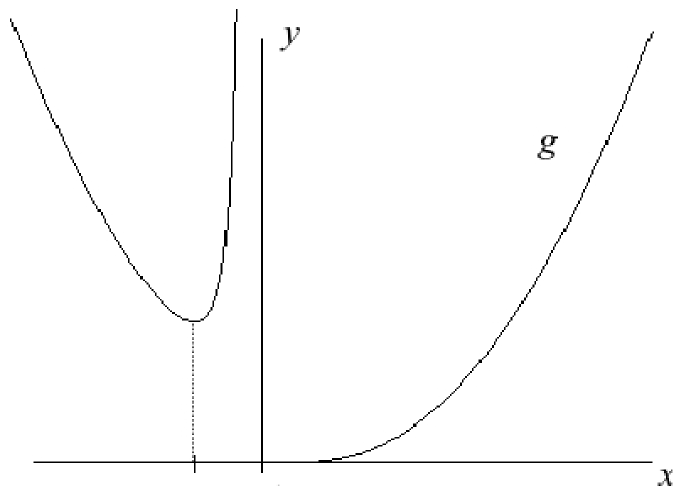
5. Graf funkce (2.4).

....

$$\textbf{c)} \qquad h(x) = \arcsin\frac{2}{x},$$

1. Pro definiční obor platí $-1 \le \frac{2}{x} \le 1$. Odtud $D(f) = (-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,\infty)$. (Pozor na časté chybné řešení, získané roznásobením x bez předpokladů o jeho znaménku.)

znam $h(x)$ $\quad -$ $\quad -2 \quad 2$ $\quad +$ $\quad x$



Obrázek 2.4:

h je lichá (plyne to z lichosti funkce arcsin).

2.

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \cdot \frac{-2}{x^2} = \frac{-2|x|}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-4}},$$

proto

$$h'(x) = \frac{2}{x \cdot \sqrt{x^2-4}} \text{ pro } x \in (-\infty, 2), \quad h'(x) = \frac{-2}{x \cdot \sqrt{x^2-4}} \text{ pro } x \in (2, \infty).$$

(Pozor na časté chybné odmocnění: $\sqrt{x^2} = |x|$ a nikoli x.)

$D(h') = D(h)$,

znam $h'(x)$ 

Lokální extrémy nenastanou.

3.

$$h''(x) = \frac{2}{x^2 \cdot (x^2-4)} \cdot \left(\sqrt{x^2-4} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} \right) \text{ pro } x \in (2, \infty),$$

proto

$$h''(x) = \frac{4(2-x^2)}{x^2 \cdot \sqrt{(x^2-4)^3}} \text{ pro } x \in (-\infty, 2) \text{ a } h''(x) = \frac{4(x^2-2)}{x^2 \cdot \sqrt{(x^2-4)^3}} \text{ pro } x \in (2, \infty),$$

$D(h'') = D(h')$.

znam $h''(x)$ $\frown\ -$ $\qquad$ $\smile\ +$

$-2 \qquad 2 \qquad x$

Inflexní bod funkce h nemá.

4. Platí

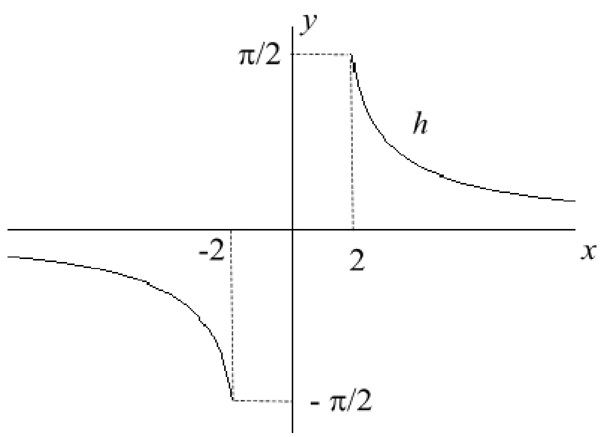
$$\lim_{x\to 2_+} \arcsin\frac{2}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 2_-} \arcsin\frac{2}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

asymptoty svislé tedy nejsou. Dále

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arcsin\frac{2}{x} = \arcsin 0 = 0$$

a přímka $y = 0$ je vodorovná asymptota (2.5).

5.



Obrázek 2.5:

Cvičení 2.11.1: Vyšetřete průběh funkce f.

1) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

2) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

3) $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$.

4) $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

2.12 Kontrolní otázky

- Definujte derivaci funkce f v bodě x_0. Vysvětlete její geometrický význam, napište rovnice tečny a normály ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.
- Jaký je vztah mezi derivací $f'(x_0)$ a spojitostí funkce f v bodě x_0 ?
- Uveďte pravidla pro derivování součtu, součinu a podílu funkcí. Uveďte pravidla pro derivování složené a inverzní funkce.
- Graficky znázorněte geometrický význam diferenciálu a uveďte vztah pro jeho výpočet. K řešení jaké úlohy lze diferenciál použít?
- Pomocí obrázků vysvětlete význam základních vět o spojitých funkcích (Cauchyova, Weierstrassova, Rolleova, Lagrangeova).
- Jak se definují derivace a diferenciály n–tého řádu?
- Co je to Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě x_0? Jak se odvozují jeho koeficienty? Zapište Lagrangeův tvar zbytku.
- Co je to Maclaurinův polynom?
- K čemu slouží l'Hospitalovo pravidlo? Co přesně pravidlo tvrdí? Jaká jsou úskalí tohoto pravidla? Kdy pravidlo nevede k cíli?
- Jaké druhy asymptot znáte? Nakreslete obrázky, které je charakterizují. Uveďte vztahy potřebné pro jejich výpočet.
- Jak lze matematicky vyjádřit vlastnost - funkce f je rostoucí v bodě x_0? Jak tato vlastnost souvisí s hodnotou $f'(x_0)$? Souvislost vlastnosti s hodnotou $f'(x_0)$ zdůvodněte.
- Definujte lokální extrémy funkce f v bodě x_0.
- Co jsou to stacionární body funkce f? Kdy má funkce v těchto bodech lokální extrémy?
- Kdy řekneme, že je funkce f v bodě x_0 konvexní (konkávní)?
- Co jsou inflexní body?
- Vysvětlete postup při vyšetřování průběhu funkce.

2.13 Klíč, Testy ke zpracování

Cvičení 2.1.4

1) $f'(x) = -\frac{6}{\sqrt{\pi}}x, \quad x \in \mathbb{R}$

2) $f'(x) = 5\sqrt{x^3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}, \quad x \in \mathbb{R}^+$

3) $f'(x) = \frac{1}{-1+\cos x}, \quad D(f') = D(f) = \mathbb{R} - \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

4) $f'(x) = \frac{1-x+\ln x}{(1-x)^2}, \quad D(f') = D(f) = (0, \infty) - \{1\}$

5) $f'(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}, \quad D(f) = \langle 0, 2\rangle,\ D(f') = (0, 2)$

6) $f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{5+4x-x^2}}, \quad D(f) = \langle -1, 5\rangle,\ D(f') = (-1, 5)$

7) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2+x^4}, \quad D(f') = D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

8) $f'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}, \quad D(f') = D(f) = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, (2k+1)\pi)$

9) $f'(x) = -\frac{4x}{\ln^3(x^2+1)}, \quad x \in \mathbb{R}$

Cvičení 2.2.1

1) $\mathrm{d}f(1; 0,2) = 0,2$

2) $\mathrm{d}f(x_0; h) = \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}} \cdot h$

3) $\mathrm{d}f(0; h) = 2h$

Cvičení 2.4.1

1) $f''(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}, \quad D(f) = \langle 1, \infty),\ D(f'') = (1, \infty)$

2) $f''(x) = -\frac{x}{(x^2+1)^2}, \quad D(f) = D(f'') = \mathbb{R}$

3) $f''(x) = \frac{1}{x}, \quad D(f) = D(f'') = (0, \infty)$

4) $f''(x) = \frac{x(2x^2+9)}{\sqrt{(x^2+3)^3}}, \quad D(f) = D(f'') = \mathbb{R}$

Cvičení 2.5.1

1) $\mathrm{d}^3 f(x_0,h) = \frac{8}{(1+2x_0)^3} \cdot h^3$

2) $\mathrm{d}^2 f(2,h) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot h^2$

3) $\mathrm{d}^2 f(0,h) = h^2$

. . . .

Cvičení 2.6.3

a) $T_3(f,0,x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$,

b) $T_2(f,1,x-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi+2}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2$,

c) $T_n(f,0,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^k$.

. . . .

Cvičení 2.7.3

1) $\frac{1}{3}$, 2) 1, 3) -2, 4) 0.

. . . .

Cvičení 2.8.1

1) $\lim_{x\to -2_-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -2_+} f(x) = -\infty$, přímka $x=-2$ je asymptotou (existuje $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, proto není přímka $x=0$ asymptotou).

2) $g(x) = \ln \frac{2x+1}{x-3}$ existuje, pokud $x \in \mathbb{R} - \langle -\frac{1}{2}, 3\rangle$,
platí $\lim_{x\to 3_+} g(x) = \infty$ a $\lim_{x\to -\frac{1}{2}_-} g(x) = -\infty$, proto jsou přímky $x=3$, $x=-\frac{1}{2}$ asymptotami.

. . . .

Cvičení 2.8.2

a) $y = \frac{1}{2}$ pro $x \to \pm\infty$,
b) $y = -\frac{\pi}{3}$ pro $x \to \pm\infty$
jsou asymptoty.

. . . .

Cvičení 2.8.4

a) $y = \frac{2}{3}x + 1$ pro $x \to \pm\infty$,
b) $y = x$ pro $x \to \infty$ a $y = -x$ pro $x \to -\infty$,
c) $y = -1 + x \cdot \ln 2$ pro $x \to \pm\infty$ jsou asymptoty.

. . . .

Cvičení 2.11.1

Uvádíme výsledky mezivýpočtů, které jsou již postačující pro nakreslení grafů získaných funkcí.

Poznámky k označení: N nulové body, I inflexní body, E extremální body funkce.

1) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $\quad f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$, $\quad f''(x) = \frac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$,

$D(f) = D(f') = D(f'') = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,

$N = [0, 0]$, $I = [0, 0]$,

asymptoty: $x = 1$ pro $x \to 1\pm$, $x = -1$ pro $x \to -1\pm$,
$y = 0$ pro $x \to \pm\infty$.

2) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $\quad f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$, $\quad f''(x) = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$,

$D(f) = D(f') = D(f'') = \mathbb{R} - \{-1\}$,

$E = [0, 1]$,

asymptota: $y = 0$ pro $x \to -\infty$.

3) $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$, $\quad f'(x) = \frac{-2+\ln x}{x^2}$, $\quad f''(x) = \frac{5-2\ln x}{x^3}$,

$D(f) = D(f') = D(f'') = (0, \infty)$,

$N = [e, 0]$, $E = [e^2, -e^2]$, $I = [e^{5/2}, -\frac{3}{2}e^{-5/2}]$,

asymptoty: $x = 0$ pro $x \to 0_+$, $y = 0$ pro $x \to \infty$.

4) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, $D(f) = \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{pro } |x| < 1 \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{pro } |x| > 1 \end{cases}, \qquad f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{pro } |x| < 1 \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{pro } |x| > 1 \end{cases},$$

$D(f') = D(f'') = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,

$N = [0, 0]$, $E_1 = [-1, -\pi/2]$, $E_2 = [1, \pi/2]$, $I = [0, 0]$,

asymptota: $y = 0$ pro $x \to \pm\infty$.

Test I.3

Jméno a příjmení: ______________________________
Adresa: ______________________________

E-mail: ______________________________
Telefon: ______________________________

1. *Určete derivaci $f'(x)$ a definiční obory $D(f)$, $D(f')$ funkce*

   a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x + \ln\sqrt{1-x^2}$,

   b) $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x = e^{x \cdot \ln \frac{x}{x-1}}$.

2. *Derivujte a upravte*

   a) $f(x) = \sqrt{ax - x^2} - a \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, $\quad a > 0$ je konstanta,

   b) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x \cdot \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

3. *Vypočtěte $f''(x)$, je-li $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$.*

4. *Určete rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = e^{-x}\cos 2x$ v bodě $A = [0, y_0]$.*

5. *Vypočítejte limity funkcí*

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$,

   b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x}\right)$,

   c) $\lim_{x\to\infty} e^{x \cdot \ln \frac{x}{1+x}}$,

6. *Napište rovnice asymptot grafů funkcí*

   a) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$,

   b) $y = x + \frac{2x}{x^2-1}$,

   c) $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$.

Tabulka hodnocení

1. a	1. b	2. a	2. b	3.	4.	5. a	5. b	5. c	6. a	6. b	6. c	Σ
2	2	4	4	2	2	2	2	2	2	2	2	body

Opravil:

Test I.4

Jméno a příjmení: ________________________

Adresa: ________________________

E-mail: ________________

Telefon: ________________

I. *Vyšetřete průběh funkce $y = f(x)$ a nakreslete její graf, je-li*

1) $f(x) = x^4 - 2x^2$,
2) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$,
3) $f(x) = xe^{-x}$,
4) $f(x) = \ln(x^2+1)$.

II. *Užitím diferenciálu určete absolutní a relativní chybu, která vznikne výpočtem obsahu kruhu z naměřeného poloměru $r_0 = 2m$, jestliže měření je zatíženo chybou, nepřesahující 4 mm.*

III. *Určete Taylorův polynom n–tého stupně funkce $y = f(x)$ v okolí bodu x_0, je-li:*

1) $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = -1$, $n = 4$,
2) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$, $n = 3$.

Tabulka hodnocení

I 1	I 2	I 3	I 4	II	III 1	III 2	Σ
4	4	4	4	4	4	4	body

Opravil:

Rejstřík

Literatura

[1] Anton H., *Calculus with Analytic Geometry*, John Wiley, 1995.

[2] Brabec J., Martan F., Rozenský Z., *Matematická analýza* I, SNTL, Praha 1989.

[3] Daněček J. a kolektiv, *Sbírka příkladů z matematiky* I, VUT, FAST, CERM, Brno 2000.

[4] Drábek P., Míka S., *Matematická analýza* I, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň 1999.

[5] Jankovský Z., Průcha L., *Diferenciální počet* I, ČVUT, Fakulta elektrotechnická, Praha 1996.

[6] Jarník V., *Diferenciální počet* I, NČSAV, Praha 1963.

[7] Novák V., *Diferenciální počet v* $\mathbb{R}$ (skripta), Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno 1997.

[8] Tryhuk V., *Matematika* I_2, *Reálná funkce jedné reálné proměnné*, VUT, FAST, CERM, 2001.

[9] Veverka J., Slatinský E., *Matematika* I_3, *Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, VUT, FAST, CERM, Brno 1995.